تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی به‌وسیلهٔ حل معکوس *

مریم شمسا[۱]   محمدرضا گلبهار حقیقی[۲]   پرویز ملک‌زاده[۳]

چکیده *در این مقاله پارامترهای مکانی و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای و گستردهٔ متغیر با زمان برای یک ورق مستطیلی مدرج تابعی به‌وسیلهٔ الگوریتم معکوس برمبنای روش گرادیان مزدوج تخمین زده خواهد شد. این کار به‌وسیلهٔ اندازه‌گیری دما روی مرزهای ورق انجام می‌گیرد. فرض بر این است که هیچ اطلاع اولیه‌ای از مکان منبع و تابع شدت منبع حرارتی در دسترس نیست، بنابراین روند تخمین با یک حدس اولیهٔ دلخواه آغاز می‌گردد. برای گسسته‌سازی معادلات حاکم از روش اجزامحدود برای مشتقات مکانی و روش کرنک نیکلسون برای گسسته‌سازی مشتقات زمانی استفاده گردیده است. در این مقاله برای اولین‌بار به تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی، پرداخته شده است. علاوه‌براین در تخمین منبع حرارتی، هم منبع نقطه‌ای و هم منبع گسترده مورد بررسی قرار گرفته‌اند.*

واژه‌های کلیدی مواد مدرج تابعی، انتقال حرارت، روش گرادیان مزدوج، مسائل معکوس، منبع حرارتی.

Simultaneous Estimation of Location and Strength of a Heat Source in a Functionally Graded Plate by Inverse analysis

M. Shamsa   M.R. Golbahar Haghighi   P. Malekzadeh

Abstract *In this article, an inverse algorithm based on the conjugate gradient method is applied to estimate the unknown location and time-wise varying strength of the point and distributed heat source in functionally graded rectangular plate from the knowledge of temperature measurements taken from the boundaries of plate. It is assumed that no prior information is available on the functional form of time-wise variation of the heat source strength so estimation process starts with an arbitrary initial guess. The conjugate gradient method is employed for optimization process and the finite element method is applied to solve the governing differential equations. Results show that the estimation of location and strength of point heat source can be obtained with any arbitrary initial guesses.*

Key Words Functionally Graded Materials, Heat Transfer, Conjugate Gradient Method, Inverse Problems, Heat Source.

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱۰/۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۵/۲ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.61392

(۱) کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر.

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر golbahar@pgu.ac.ir

(۳) استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر.

مقدمه

مواد هدفمند مواد غیرهمگنی می‌باشند که برای بهینه‌کردن تنش و مقاومت حرارتی و توزیع دما در اجزا و سازه‌هایی که در معرض حرارت بالا یا بار مکانیکی قرار گرفته‌اند مورد استفاده قرار می‌گیرند. مواد مدرج تابعی از انواع مواد پیشرفته با ریزساختار ناهمگن می‌باشند که نوع رایج آن ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز است. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک به‌دست می‌آیند. تفاوت این مواد با مواد مرکب لایه‌ای سنتی در این است که در مواد لایه‌ای خواص مواد سازندهٔ آنها به‌صورت لایه‌ای از یک لایه به لایهٔ دیگر تغییر می‌کرد درصورتی‌که در مواد مدرج تابعی خواص به‌صورت پیوسته و تدریجی برحسب متغیر مکانی (معمولاً در راستای ضخامت) تغییر می‌کنند و باتوجه به نوع مواد به‌کاررفته و نحوهٔ قرارگیری ذرات ماده در آنها، از مقاومت حرارتی و مکانیکی بالایی نسبت به سایر مواد برخوردار می‌باشند. این ویژگی‌ها سبب شده است که از این مواد در ساخت سازه‌ها و ماشین‌آلات خاص ازجمله در صنایع فضایی که نیاز به اجزایی با وزن پایین و مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا می‌باشد، استفاده گردد. این مواد در ساخت صفحات و پوسته‌های مخازن راکتورها و توربین‌ها و دیگر اجزای ماشین‌ها نیز کاربرد بسیاری پیدا کرده‌اند؛ زیرا این قطعات توانایی بالایی در برابر شکست ناشی از کمانش حرارتی دارند.

در مسائل کلاسیک به‌طور معمول با داشتن شرایط اولیه و شرایط مرزی از یک مدل فیزیکی، به بررسی تأثیرات این شرایط بر میدان حل پرداخته می‌شود. برای مثال در صنایع پیشرفتهٔ ساخت نازل موشک، دانستن شار حرارتی وارد بر بدنهٔ نازل از اهمیت فراوانی برخوردار است زیرا وجود شار حرارتی بالا در این ناحیه باعث زیاد شدن قطر گلوگاه نازل و درنتیجه کاهش کارایی پیشران نازل می‌شود که درنهایت، این عوامل کارایی موتور را کاهش می‌دهند.

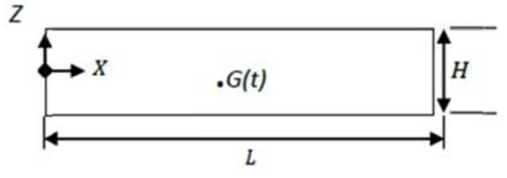
در برخی مسائل اندازه‌گیری مستقیم برخی مقادیر به‌روش تجربی، به دو دلیل امکان‌پذیر نمی‌باشد. اولاً در بعضی موارد دمای سطوح داخلی مورد اندازه‌گیری به‌اندازه‌ای بالاست که حسگرها قادر به تحمل و اندازه‌گیری نمی‌باشند (مثلاً وجود دمای بالای ۳۰۰۰ درجهٔ سانتی‌گراد در موشک‌ها)، ثانیاً در بعضی از موارد، وسایل مورد استفاده برای اندازه‌گیری بسیار پیچیده و پرهزینه می‌باشند که شاید برآوردن هدف مورد نظر از آن سیستم مقرون‌به‌صرفه نباشد. ازاین‌رو در سال‌های اخیر تحقیقاتی برروی مسائل انتقال حرارت انجام گرفته که نتایج آن منجر به ایجاد روشی جایگزین گردیده است. به‌طور کلی مسائل انتقال حرارت را می‌توان به دو دستهٔ مستقیم و معکوس تقسیم‌بندی نمود. امروزه برای تعیین برخی از پارامترهای حرارتی، از روش‌های معکوس استفاده می‌شود. استفاده از روش‌های معکوس وقتی ارزشمند است که اندازه‌گیری مستقیم پارامترهای حرارتی غیرممکن و یا پرهزینه باشد. در مسائل انتقال حرارت با روش مستقیم (Direct heat transfer problems) هندسه، شرایط مرزی، شرایط اولیه و همچنین خواص ترموفیزیکی معلوم است و هدف محاسبهٔ توزیع دما در داخل ناحیهٔ مورد بررسی بااستفاده از حل معادلات حاکم می‌باشد؛ درحالی‌که در مسائل انتقال حرارت معکوس (Inverse heat transfer problems) تعدادی از این اطلاعات نامعلوم می‌باشند و هدف تخمین آنها بااستفاده از دماهای اندازه‌گیری‌شده در مرزهای ناحیهٔ مورد بررسی می‌باشد. در این روش حجم محاسبات تجربی مورد نیاز برای به‌دست آوردن کمیت‌های ترموفیزیکی نظیر منابع حرارتی، خواص حرارتی مواد، شرایط مرزی درگیر یا توزیع شارهای حرارتی به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

درزمینهٔ تخمین منبع حرارتی به‌روش معکوس، سیلوا نتو و اوزیسیک [1] در سال ۱۹۹۳ مسئلهٔ یک‌بعدی تخمین یک منبع حرارتی تابع زمان و مکان را در مواد همگن بررسی کردند. آنها شرایط مرزی را به‌صورت دو مرز عایق درنظر گرفتند و از روش گرادیانی مزدوج به‌همراه مسئلهٔ الحاقی برای حل مسئلهٔ معکوس استفاده کردند. پاسکوتی و پتیت [2] در سال ۱۹۹٤ مسئلهٔ معکوس انتقال حرارت‌گذاری دوبعدی را بوسیلهٔ روش المان مرزی بررسی کردند. آنها دما و شار حرارتی را در مواد همگن و در مرزهایی که دارای زوایای کمتر از ۱۸۰ درجه بود، تخمین زدند. یانگ [3] در سال ۱۹۹۷ از روش خطی خطای حداقل مربعات برای حل مسئلهٔ دوبعدی تخمین شدت یک منبع حرارتی خطی استفاده کرد. او مادهٔ مورد بررسی را همگن و منبع حرارتی را به‌صورت تابعی از زمان و مکان درنظر گرفت. کرمی و همتیان [4] در سال ۲۰۰۰ روش المان مرزی را برای تخمین شدت یا محل منبع های حرارتی نقطه‌ای چندگانه در حالت پایا و برای مسائل دوبعدی، ارائه دادند. آنها برای حل مسئلهٔ معکوس یک الگوریتم به نام همسایهٔ خوب پیشنهاد نمودند. البته با این روش نمی‌توان هم‌زمان محل و شدت منبع حرارتی را تعیین نمود. سو و همکاران [5] در سال ۲۰۰۱ مسئلهٔ تخمین معکوس یک منبع حرارتی را در مختصات استوانه‌ای بررسی کردند. آنها منبع تخمینی را در سه حالت تابع زمان، تابع شعاع و تابع زاویه، مورد بررسی قرار دادند. آنها جسم مورد بررسی را همگن درنظر گرفتند و برای حل مسئلهٔ معکوس از روش گرادیانی مزدوج استفاده نمودند. نرترشوسر و میلان [6] در سال ۲۰۰۱ مسئلهٔ معکوس و گذرای تخمین یک منبع حرارتی متحرک را در یک مدل سه‌بعدی همگن بررسی کردند. در این کار به‌منظور تخمین منبع از اصل برهم‌نهی استفاده گردیده است. لی نیلوت و لفور [7] در سال ۲۰۰۱ مسئلهٔ معکوس تخمین چند منبع حرارتی خطی در یک مسئلهٔ دوبعدی با مواد همگن را بررسی کردند. آنها از روش المان مرزی برای حل عددی معادلات استفاده نمودند. لفور و لی نیلوت [8] در سال ۲۰۰۲ مسئلهٔ گذرای تخمین معکوس منبع حرارتی ساکن و متحرک را در مواد همگن و به‌صورت دوبعدی و سه‌بعدی بررسی کردند. لفور و لی نیلوت [9] در سال ۲۰۰۲ مسئلهٔ تعیین منبع‌های حرارتی گذرای نقطه‌ای را در مواد همگن و در دو بعد بررسی کردند. در این مسئله از روش المان مرزی برای حل عددی معادلات استفاده گردیده است. لی نیلوت و همکاران [10] در سال ۲۰۰٤ از روش تخمین پارامتر برای حل معکوس مسئلهٔ منبع حرارتی نقطه‌ای استفاده کردند. آنها حوزهٔ کاری را همگن و محل و شدت منبع حراراتی را ثابت درنظر گرفتند. زوکو و همکاران [11] در سال ۲۰۰٦ از یک روش شبیه‌سازی شبکه‌ای برای مشخص کردن ترم منبع حرارتی وابسته به زمان برای یک مسئلهٔ دوبعدی انتقال حرارت با مواد همگن استفاده کردند. لیو [12] در سال ۲۰۰۷ از روش پرتابی برای تخمین شدت یک منبع حرارتی صفحه‌ای در یک مسئلهٔ هدایت‌گذرای یک‌بعدی با مواد همگن استفاده کرد. لیو [13] در سال ۲۰۰۸ از الگوریتم ژنتیک اصلاح‌شده برای حل مسئلهٔ معکوس تخمین یک منبع حرارتی در یک بعد استفاده کرد. در این مسئله مادهٔ مورد بررسی همگن و منبع حرارتی فقط به‌صورت تابعی از زمان درنظر گرفته شده است. لیانگ و همکاران [14] در سال ۲۰۰۸ یک روش عددی اساسی بدون شبکه را برای تخمین منبع‌های حرارتی بررسی کردند. آنها حوزهٔ کاری را یک‌بعدی و همگن و منبع حرارتی را فقط به‌صورت تابعی از زمان تعریف کردند. نیلی احمدآبادی و همکاران [15] در سال ۲۰۰۹ روش حل‌های پایه‌ای را برای حل مسئلهٔ معکوس تخمین منبع حرارتی تابع مکان در یک مسئلهٔ یک‌بعدی با مواد همگن مورد بررسی قرار دادند. میرزویسزاک و کولودزیج [16] در سال ۲۰۱۰ موضوع کاربرد روش حل‌های اساسی و توابع اساسی شعاعی را

برای حـل معکـوس مسـئلهٔ انتقـال حـرارت دوبعـدی ناپایدار بررسی کردند. در این کار، مادهٔ مـورد بررسـی همگن و منبع حرارتی به‌صورت تابعی از مکان تعریف شده است. گنـگ و لـین [17] در سـال ۲۰۰۹ از روش تکرار متغیرها برای حلِ معکـوس یـک منبـع حرارتـی استفاده کردند. آنها مادهٔ مورد بررسی را همگن و منبـع حرارتی را به‌صـورت تـابعی از زمـان و مکـان درنظـر گرفتند. این مسئله به‌صورت یک‌بعدی و شرایط مـرزی آن به‌صورت تـابعی از مکـان بررسـی گردیـد. گلبهـار حقیقی و همکاران [18] در سال ۲۰۰۹ بااستفاده از حل معکوس، شار حرارتی را در یک ورق ضخیم از جـنس مواد مدرج تابعی تخمین زده‌اند. آنها برای حل مستقیم مسئله، از ممزوج کردن دو روش دیفرانسیل کـوادریچر و اجزامحدود و بـرای حـل مسـئلهٔ معکـوس از روش گرادیان مزدوج بهره جسـته‌انـد. محمـدیون و رحیمـی [19] در سال ۲۰۱۱ شـار حرارتـی نقطـه‌ای را در یـک سیستم دو لایه به‌دست آوردند. آنها برای حـل مسـتقیم مسئله از روش اخـتلاف محـدود و بـرای حـل مسـئلهٔ معکوس از روش گرادیان مزدوج استفاده نمودند. لی و همکاران [20, 21] در سال ۲۰۱۲ در پژوهشی، از حـل معکوس برای تخمین شارهای حرارتی نـامعلوم متغیـر با زمان در سطح درونی و بیرونی یک استوانهٔ توخـالی دایروی ساخته‌شده از مواد هدفمند استفاده نمـوده‌انـد. آنها از روش تبدیل لاپلاس و اخـتلاف محـدود بـرای حل مسئلهٔ مسـتقیم و از روش گرادیـان مـزدوج بـرای حل مسئلهٔ معکـوس بهـره بردنـد. براسـاس اطلاعـات نویسندگان، تاکنون در زمینهٔ تخمین هـم‌زمـان مکـان و شدت منبع حرارتی در ورق هدفمند مـدرج، پژوهشـی صورت نپذیرفته است. لذا در این مقاله برای اولـین‌بـار به تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی، پرداخته شده است. علاوه‌براین در تخمین منبع حرارتی، هم منبع نقطه‌ای و هم منبع گسترده مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

مدل ریاضی

مسئلهٔ مورد نظر یـک مسـئلهٔ انتقـال حـرارت هـدایت دوبعدی در یک ورق نازک مدرج تابعی می‌باشد که در آن ظرفیت حرارتی، ضریب هدایت و چگالی به‌عنـوان مفروضات مسئله مشخص است. در شکل (۱) هندسـهٔ ورق نشـان داده شـده اسـت. ورق شـامل یـک منبـع حرارتی می‌باشد که مکان آن ثابت می‌باشد، اما شـدت آن با زمان تغییر مـی‌کنـد. هـدف از حـل ایـن مسـئله، تخمین هم‌زمان شدت و مکان منبع حرارتی بااستفاده از اطلاعات دمای اندازه‌گیری‌شده برحسب زمان در چنـد نقطهٔ معلوم روی مرز می‌باشـد. ضـرورت اسـتفاده از حل معکوس برای حل مسـئلهٔ حاضـر ایـن اسـت کـه بعضی مواقع امکان تعیین مستقیم مکان و شـدت منبـع حرارتی وجود ندارد. در مسئلهٔ حاضر فرض مـی‌شـود که حسگرها یک اندازه‌گیری پیوسـته انجـام مـی‌دهنـد. بنابراین در معادلات بیان‌شـده در مراحـل بعـد، دمـای اندازه‌گیری‌شده توسط حسگرها به‌عنوان تابعی پیوسـته از زمان درنظر گرفته مـی‌شـود. بـرای تعیـین شـدت و مکان منبع حرارتی به‌وسیلهٔ برنامهٔ کامپیوتری ابتدا چنـد حسگر حرارتی در نقـاط مناسـب قـرار داده مـی‌شـود. سپس کل بازهٔ زمانی مسئله به زیربازه‌هـای کوچـک‌تـر تقسیم می‌شود پس از این‌که منبـع حرارتـی شـروع بـه تولید انرژی کـرد، تغییـرات زمـانی دمـای نقـاطی کـه حسگر در آنهـا قـرار داده شـده اسـت در هـر یـک از زیربازه‌های زمانی، به‌وسیلهٔ حسـگرها ثبـت مـی‌شـود. آن‌گاه شدت و مکان منبع حرارتی بااستفاده از اطلاعات ثبت‌شده توسط حسگرها و به‌کمک حل عددی محاسبه می‌گردد.



شکل ۱ هندسهٔ ورق

تحلیل معکوس

روند معمول برای حل این مسئله به‌روش تحلیل معکوس در ذیل بیان شده است.

فرض بر این است که یک حدس اولیه x_0 و z_0 برای مختصات منبع حرارتی در دسترس است.

- روش گرادیان مزدوج به‌همراه مسئلهٔ الحاقی برای تخمین شدت منبع حرارتی $G(t)$ را به‌عنوان یک مسئلهٔ تخمین تابع، به‌کار می‌گیریم.
- اکنون شدت منبع حرارتی $G(t)$ معلوم است و روش گرادیان مزدوج برای تخمین مختصات z_0 و x_0 منبع حرارتی به‌عنوان یک مسئلهٔ تخمین پارامترها، به‌کار گرفته می‌شود.
- با x_0 و z_0 جدید به‌دست‌آمده، مجدداً روش گرادیان مزدوج به‌منظور تخمین جدید برای $G(t)$ استفاده می‌گردد. این روند تکراری تا زمانی ادامه می‌یابد که معیار توقف مشخص‌شده در تخمین $G(t)$ و x_0 و z_0 ارضا گردد.

تخمین $G(t)$

مسئلهٔ مستقیم. یک ورق نازک دوبعدی را که مرزهای آن در شکل (۱) نشان داده شد، درنظر بگیرید. فرض بر این است که خواص حرارتی ورق یعنی ضریب هدایت، ظرفیت حرارتی و چگالی صفحه در راستای z تغییر می‌کند؛ بنابراین معادلهٔ حاکم و شرایط مرزی برای مسئلهٔ انتقال حرارت گذرا به‌صورت معادلهٔ (۱) نوشته می‌شود [22].

معادلهٔ حاکم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(z)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(z)\frac{\partial T}{\partial z}\right) + G(t)\delta(x-x_0)\delta(z-z_0) = \rho(z)c(z)\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱)$$

شرایط مرزی و اولیه:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 \quad \text{on} \quad x=0 \qquad (\text{۲- الف})$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=0 \quad \text{on} \quad z=0 \qquad (\text{۲- ب})$$

$$T=T_i \quad \text{on} \quad x=L\,,\ \ z=H \qquad (\text{۲- ج})$$

$$T(x,z,0)=T_0(x,z) \qquad (\text{۲- د})$$

در معادلهٔ (۱) پارامترهای T، $\rho(z)$، $c(z)$ و $k(z)$ به‌ترتیب دما، چگالی، ظرفیت گرمایی و ضریب هدایت ماده یک نقطه از مادهٔ مدرج تابعی می‌باشد. $G(t)$ نیز منبع حرارتی نقطه‌ای می‌باشد.

در مسئلهٔ مستقیم، منبع حرارتی برای زیربازه‌های زمانی مختلف حدس زده می‌شود و با فرض معلوم‌بودن منبع حرارتی و داشتن $\rho(z)$ و $c(z)$ و $k(z)$، تنها مجهول در معادلهٔ (۱) میدان دمای $T(x,y,t)$ می‌باشد. در این مقاله، از روش اجزامحدود برای گسسته‌سازی معادلات حاکم استفاده گردیده است. لذا با مش‌بندی ورق بااستفاده از روش اجزامحدود با حل معادلهٔ (۱) و درنظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه در معادلات (۲)، توزیع دما در تمام نقاط ورق به‌دست می‌آید.

با حل معادلهٔ (۱) به‌روش عددی و درنظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه، میدان دمای $T(x,y,t)$ برروی تمام نقاط صفحه به‌دست آید. با مشخص شدن میدان دمای T برروی کل صفحه، دمای محلی که حسگرها قرار دارند یعنی بردار T_m، در هر یک از زیربازه‌های زمانی ثبت می‌شود. آن‌گاه توسط حسگر حرارتی دمای واقعی نقاط یعنی Y_m نیز در هر زیربازهٔ زمانی اندازه‌گیری می‌شود. اکنون از اختلاف بین این دو دما و بااستفاده از معادلهٔ (۵) مقدار J محاسبه می‌شود. حال اگر J از معیار توقف، که در مراحل بعد تعریف خواهد شد کوچک‌تر بود، پس شدت و مکان حدسی، تخمین خوبی برای منبع حرارتی خواهد بود و اگر از معیار توقف بزرگ‌تر بود، الگوریتم حل برای اصلاح‌کردن شدت و مکان حدسی تا رسیدن به یک تخمین مطلوب، وارد مرحلهٔ بعدی می‌شود [26].

به‌دلیل پیچیدگی معادلات حاکم از یک روش عددی تقریبی برای حل استفاده می‌کنیم.

خواص حرارتی و فیزیکی مواد مدرج تابعی، به‌طور پیوسته و به‌صورت تابعی از توزیع و خواص مواد آن نوشته می‌شود. استفاده از مدل توانی ساده برای توزیع مواد مدرج تابعی متداول است؛ لذا توزیع توانی خواص مادهٔ مدرج تابعی به‌صورت معادلهٔ (۳) درنظر گرفته می‌شود.

$$G(z) = G_M + (G_C - G_M)[V_f)]^p \tag{۳}$$

که در اینجا،

$$V_f = \left[\frac{1}{2} + (\frac{z}{h})\right]^p \tag{٤}$$

زیرنویس‌های C و M به‌ترتیب اشاره به سرامیک و فلز دارند. V_f تابع توزیع ماده و P نیز شاخص تابع توزیع می‌باشد که یک عدد مثبت است. هر کدام از خواص ضریب هدایت، ظرفیت گرمایی و چگالی مادهٔ مدرج تابعی از رابطهٔ (۳) به‌دست می‌آید.

مسئلهٔ معکوس. هدف تحلیل معکوس، پیش‌بینی شدت و مکان منبع حرارتی متغیر با زمان به‌وسیلهٔ اندازه‌گیری دما در برخی نقاط در زمان‌ها و مکان‌های دلخواه می‌باشد. فرض بر این است که به‌جز منبع حرارتی، سایر پارامترها در معادلات (۱ و ۲) معلوم می‌باشد. از طرفی خواندن دما در برخی نقاط در زمان دلخواه نیز امکان‌پذیر می‌باشد. حل این مسائل به‌وسیلهٔ یک روش بهینه‌سازی انجام می‌گیرد. طبق این روش با مینیمم‌سازی تابع مشخص‌شده در معادلهٔ (۵) توابع مجهول به‌دست می‌آیند.

$$J[G(t), x^*, z^*] = \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{M} [T_m(x,z,t) - Y_m(x,z,t)]^2 \, dt \tag{۵}$$

در معادلهٔ (۵) پارامترهای T_m و Y_m به‌ترتیب دمای تخمینی الگوریتم حل و دمای اندازه‌گیری‌شده در محل قرارگیری حسگرها در زمان دلخواه می‌باشد. T_m با قرار دادن مقدار تخمینی $G_E(t)$ به‌جای مقدار دقیق منبع حرارتی $G(t)$ از حل معادلهٔ مستقیم (۱) که پیشتر توضیح داده شد، به‌دست می‌آید.

روش گرادیان مزدوج به‌عنوان یک روش شناخته‌شده برای کمینه‌سازی تابع هدف که با معادلهٔ (۵) مشخص شده است به‌کار گرفته می‌شود.

مسئلهٔ حساسیت. برای تعیین مسئلهٔ حساسیت، فرض می‌شود که شدت منبع حرارتی $G(t)$ به‌اندازهٔ $\Delta G(t)$ افزایش پیدا می‌کند. در اثر این افزایش، میدان دمای $T(x,z,t)$ به‌اندازهٔ $\Delta T(x,z,t)$ افزایش می‌یابد. بنابراین با جایگزین کردن $T(x,z,t)$ با $T(x,z,t) + \Delta T(x,z,t)$ و $G(x,z,t)$ با $G(x,z,t) + \Delta G(x,z,t)$ در معادلات (۱ و ۲) و کم‌کردن معادلات حاصل، از معادلات اولیهٔ آنها و صرف‌نظر کردن از ترم‌های مرتبه دو، مسئلهٔ حساسیت به‌صورت معادلهٔ (٦) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(k(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial z}\right)\\ &+\Delta G(t)\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)\\ &= \rho(z)c(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial t}\end{aligned} \tag{٦}$$

شرایط مرزی و اولیه:

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial x} = 0 \quad \text{on} \quad x = 0 \tag{۷- الف}$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \tag{۷- ب}$$

$$\Delta T = 0 \quad \text{on} \quad x = L\ ,\quad z = H \tag{۷- ج}$$

$$\Delta T(x,z,,t_0) = 0 \tag{۷- د}$$

معادلات مسئلهٔ حساسیت به همان روش معادلات مسئلهٔ مستقیم حل می‌گردد.

مسئلهٔ الحاقی و معادلهٔ گرادیانی. برای مشخص کردن مسئلهٔ الحاقی از روش ضریب لاگرانژ بهره گرفته می‌شود. در روش ضریب لاگرانژ، تابع هدف همچنان به‌صورت یک تابع واحد باقی می‌ماند. متغیر ضریب لاگرانژ با نماد $\lambda(x,z,t)$ تعریف می‌شود. برای استفاده از این روش، ابتدا معادلهٔ حاکم که با رابطهٔ (۱) نشان داده شد، در ضریب لاگرانژ ضرب می‌شود؛ سپس از آن روی کل دامنهٔ مکانی و بازهٔ زمانی انتگرال‌گیری می‌شود. عبارت به‌دست‌آمده از این عملیات جبری به‌سمت راست تابع هدف J، یعنی معادلهٔ (۵) اضافه می‌شود تا معادلهٔ (۸) حاصل شود.

$$\begin{aligned}\hat{J}[G(t),x^*,z^*] = \int_0^{t_f}\int_0^L\int_0^H \sum_{m=1}^{M} [T_m(x,z,t) \\ - Y_m(x,z,t)]^2 \\ \delta(x-x_0)\delta(z-z_0)dxdzdt \\ + \int_0^{t_f}\int_0^L\int_0^H \lambda\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(k(z)\frac{\partial T}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(k(z)\frac{\partial T}{\partial z}\Big) \\ +G(t)\delta(x-x_0)\delta(z-z_0) \\ -\rho(z)c(z)\frac{\partial T}{\partial t}\Big] dxdzdt\end{aligned} \quad (۸)$$

برای ایجاد فرم تغییراتی فرض می‌شود T به اندازهٔ ΔT و $G(t)$ به اندازهٔ $\Delta G(t)$ افزایش پیدا می‌کند؛ بنابراین برای ایجاد فرم تغییراتی در معادلهٔ (۸)، T با $T+\Delta T$، $G(t)$ با $G(t)+\Delta G(t)$ و $\hat{J}$ با $\hat{J}+\Delta\hat{J}$ جایگزین می‌شود. سپس معادلهٔ حاصل از معادلهٔ (۸) کم می‌شود و سرانجام با صرف‌نظر از عبارات مرتبه دو، فرم تغییراتی $\hat{J}$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}\Delta\hat{J} = \int_0^{t_f}\int_0^L\int_0^H \sum_{m=1}^{M} 2[T_m(x,z,t) \\ - Y_m(x,z,t)]\Delta T \\ \delta(x-x_0)\delta(z-z_0)dxdzdt \\ + \int_0^{t_f}\int_0^L\int_0^H \lambda\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(k(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(k(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial z}\Big) \\ +\Delta G(t)\delta(x-x_0)\delta(z-z_0) \\ -\rho(z)c(z)\frac{\partial \Delta T}{\partial t}\Big] dxdzdt\end{aligned} \quad (۹)$$

در ابتدا عبارت انتگرالی دوم در سمت راست معادلهٔ (۹) به‌وسیلهٔ انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء ساده می‌شود و سپس شرایط مرزی و اولیهٔ به‌دست‌آمده از معادلهٔ حساسیت در آن اعمال می‌شود. برای مینیمم‌کردن تابع هدف، می‌بایست تمام ضرایب در معادلهٔ (۹) مساوی صفر قرار داده شود. با مساوی صفر قراردادن ضریب ΔT، معادلهٔ ضریب لاگرانژ و شرایط مرزی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Big(k(z)\frac{\partial\lambda}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(k(z)\frac{\partial\lambda}{\partial z}\Big) + \rho(z)c(z)\frac{\partial\lambda}{\partial t} \\ +2[T(x,z,t)-Y(x,z,t)]\delta(x-x_0)\delta(z-z_0) = 0\end{aligned} \quad (۱۰)$$

شرایط مرزی و اولیه:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0 \quad on \quad x = 0 \quad (۱۱\text{- الف})$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0 \quad on \quad z = 0 \quad (۱۱\text{- ب})$$

$$\lambda = 0 \quad on \quad x = L\ ,\ \ z = H \quad (۱۱\text{- ج})$$

$$\lambda(x,z,,t_f) = 0 \quad (۱۱\text{- د})$$

همان‌طور که در معادلهٔ (۱۱- د) مشاهده می‌شود، ضریب لاگرانژ در انتهای بازهٔ زمانی صفر است. برای تبدیل این مسئله به یک مسئلهٔ مقدار اولیه از تغییر متغیر $\tau = t_f - t$ استفاده می‌شود. پس از آن مسئلهٔ الحاقی نیز به‌روش مسئلهٔ مستقیم حل می‌گردد. در آخر جملهٔ انتگرالی زیر باقی می‌ماند:

$$\begin{aligned}\Delta\hat{J} = \int_0^{t_f}\int_0^L\int_0^H \lambda\Delta G(t)\delta(x-x^*) \\ \delta(z-z^*)dxdzdt\end{aligned} \quad (۱۲)$$

تعریف مشتق جهتی بردار $\hat{J}$ به‌صورت معادلهٔ (۱۳) می‌باشد.

$$\Delta\hat{J} = \int_0^{t_f}\int_0^L\int_0^H J'\Delta G(t)dxdzdt \tag{۱۳}$$

حال از معادلات (۱۲ و ۱۳) می‌توان معادلهٔ گرادیانی را به‌صورت زیر نتیجه گرفت.

$$J' = \lambda\delta(x-x_0)\delta(z-z_0) = \lambda(x_0, z_0, t) \tag{۱٤}$$

رابطهٔ (۱٤) معرف مقدار λ در محل منبع حرارتی می‌باشد.

تخمین x_0 و z_0

تخمین x_0 و z_0 یک مسئلهٔ تخمین پارامتر است که برای حل آن زیرمسئله‌های ذیل که با معادلات (۱۵ و ١٦) مشخص گردیده است، بایستی حل گردد.

معادلات گرادیانی برای تخمین مکان منبع حرارتی نقطه‌ای. برای به‌دست‌آوردن معادلهٔ گرادیانی به‌منظور اصلاح مکان حدسی منبع حرارتی نقطه‌ای، بایستی از معادلهٔ (۵) به‌ترتیب نسبت به x_0 و z_0 مشتق گرفت. بنابراین J'_{x_0} و J'_{z_0} به‌ترتیب به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$J'_{x_0} = \frac{\partial J}{\partial x_0} = 2\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}(T_m - Y_m)\frac{\partial T}{\partial x_0}dt \tag{۱۵}$$

$$J'_{z_0} = \frac{\partial J}{\partial z_0} = 2\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}(T_m - Y_m)\frac{\partial T}{\partial z_0}dt \tag{١٦}$$

مقادیر J'_{x_0}وJ'_{z_0} به‌روش عددی محاسبه می‌گردند.

روند تکراری برای روش گرادیان مزدوج به‌منظور تخمین شدت منبع حرارتی نقطه‌ای

روند تکراری برای روش گرادیانی به‌منظور تخمین تابع $G(t)$ به‌وسیلهٔ معادلهٔ زیر داده می‌شود.

$$G^{k+1}(t) = G^k(t) - \beta^k d^k(t) \tag{۱۷}$$

در این معادله β^k اندازهٔ گام جستجو از مرحلهٔ kام تا مرحلهٔ $k+1$ام و $d^k(t)$ جهت گام نامیده می‌شود. بالانویس k برروی هر پارامتر نشان‌دهندهٔ مرحلهٔ تکرار الگوریتم حل می‌باشد. جهت گام $d^k(t)$ به‌صورت معادلهٔ (۱۸) تعریف می‌شود.

$$d^k(t) = J'^k + \gamma^k d^{k-1}(t) \tag{۱۸}$$

در این معادله γ^k ضریب توأم نامیده می‌شود. ضریب توأم در مرحلهٔ اول تکرار صفر درنظر گرفته می‌شود و در مراحل بعد از رابطهٔ فلچر- ریوییز به‌صورت رابطهٔ (۱۹) به‌دست می‌آید [23, 27, 28].

$$\gamma^k = \frac{\int_0^{t_f}(J'^k)^2dt}{\int_0^{t_f}(J'^{k-1})^2dt} \qquad k = 1,2,\dots \tag{۱۹}$$

اندازهٔ گام نیز از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$\beta^k = \frac{\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}({T_m}^k - {Y_m}^k)\,\Delta {T_m}^k dt}{\int_0^{t_f}\sum_{m=1}^{M}[\Delta {T_m}^k]^2\,dt} \tag{۲۰}$$

روند تکراری برای روش گرادیان مزدوج به‌منظور تخمین شدت منبع حرارتی نقطه‌ای

برای تخمین مختصات مکان منبع حرارتی، همانند پروسهٔ تکرار که در معادلهٔ (۱۷) توضیح داده شد، خواهیم داشت:

$${x_0}^{k+1} = {x_0}^k - {\beta_{x_0}}^k {d_{x_0}}^k(t) \tag{۲۱}$$

$${z_0}^{k+1} = {z_0}^k - {\beta_{z_0}}^k {d_{z_0}}^k(t) \tag{۲۲}$$

در معادلات β^k اندازهٔ گام جستجو از مرحلهٔ kام تا مرحلهٔ $k+1$ام و $d^k(t)$ جهت گام نامیده می‌شود. بالانویس k برروی هر پارامتر نشان‌دهندهٔ مرحلهٔ تکرار الگوریتم حل می‌باشد. جهت گام $d^k(t)$ به‌صورت معادلهٔ زیر تعریف می‌شود.

$$d_{x_0}{}^k(t) = J'_{x_0}{}^k + \gamma_{x_0}{}^k d_{x_0}{}^{k-1}(t) \qquad (۲۳)$$

$$d_{z_0}{}^k(t) = J'_{z_0}{}^k + \gamma_{z_0}{}^k d_{z_0}{}^{k-1}(t) \qquad (۲٤)$$

در این معادله $\gamma_\alpha{}^k(\alpha = x_0, z_0)$ در مرحلهٔ اول تکرار صفر درنظر گرفته می‌شود و در مراحل بعد از رابطهٔ فلچر- ریوییز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [23-25].

$$\gamma_{x_0}{}^k = \frac{\int_0^{t_f} (J'_{x_0}{}^k)^2 dt}{\int_0^{t_f} (J'_{x_0}{}^{k-1})^2 dt} \qquad k = 1,2,\ldots \qquad (۲۵)$$

$$\gamma_{z_0}{}^k = \frac{\int_0^{t_f} (J'_{z_0}{}^k)^2 dt}{\int_0^{t_f} (J'_{z_0}{}^{k-1})^2 dt} \qquad k = 1,2,\ldots \qquad (۲٦)$$

اندازهٔ گام نیز از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$\beta_{x_0}{}^k = \frac{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{M} [T_m{}^k - Y_m{}^k] \left\{ d_{x_0}^k . (\frac{\partial T}{\partial x_0}) \right\} dt}{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{M} \left\{ d_{x_0}^k . (\frac{\partial T}{\partial x_0}) \right\}^2 dt} \qquad (۲۷)$$

$$\beta_{z_0}{}^k = \frac{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{M} [T_m{}^k - Y_m{}^k] \left\{ d_{z_0}^k . (\frac{\partial T}{\partial z_0}) \right\} dt}{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^{M} \left\{ d_{z_0}^k . (\frac{\partial T}{\partial z_0}) \right\}^2 dt} \qquad (۲۸)$$

معیار توقف برای روش گرادیانی مزدوج. معیار توقف برای روش گرادیانی مزدوج، به‌وسیلهٔ رابطهٔ (۲۹) تعریف می‌شود [29].

$$J < \varepsilon \qquad (۲۹)$$

در این معادله ε تلورانس که خطای قابل قبول برای مسئله می‌باشد، برای حل مسئلهٔ حاضر باید طوری انتخاب شود که باتوجه به خطاهای اندازه‌گیری، حل مطلوبی به‌دست آید. حل مطلوب وقتی به‌دست می‌آید که معیار زیر ارضا شود. درادامه نتایج برای مقادیر σ از 0 تا 0.2 نشان داده می‌شود.

$$T(x_m, z_m, t_m) - Y(x_m, z_m, t_m) \approx \sigma \quad , \quad m = 1,2,\ldots,M \qquad (۳۰)$$

در معادلهٔ (۳۰) σ پارامتر انحراف از معیار خطاهای اندازه‌گیری می‌باشد. ε نیز به‌شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\varepsilon = M\sigma^2 t_f \qquad (۳۱)$$

پارامتر M در معادلات (۳۰ و ۳۱)، تعداد سنسورهای حرارتی می‌باشد.

نتایج عددی

در این قسمت دقت و صحت روش گرادیان مزدوج که یکی از روش‌های حل مسائل معکوس می‌باشد، برای تخمین شدت و مکان منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی، با ارائه جداول و نمودارهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا به بررسی صحت نتایج حاصل از حل مستقیم پرداخته می‌شود و درادامه نتایج حاصل از حل معکوس ارائه می‌گردد. به‌منظور به‌دست‌آوردن نتایج از پارامترهای بی‌بعد زیر استفاده شده است.

$$t^* = \frac{k_{ave} t_f}{\rho_{ave} c_{ave} L^2} \quad , \quad k^*(z) = \frac{k(z)}{k_{ave}} \quad ,$$
$$c^*(z) = \frac{c(z)}{c_{ave}} \quad , \quad \rho^*(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_{ave}} \quad ,$$
$$T^* = \frac{T}{G_{max} L^2 / k_{ave}} \quad , \quad L^* = \frac{H}{L} \quad ,$$
$$G^*(t) = \frac{G(t)}{G_{max}} \qquad (۳۲)$$

مادهٔ مورد بررسی به‌صورت ترکیبی از سرامیک و فلز انتخاب گردیده است که خواص مادی هر کدام در جدول (۱) آورده شده است.

جدول ۱ خواص ترموفیزیکی مواد

ماده	c(J/kgK)	k(W/mK)	$\rho(kg/m^3)$
SiC	670	65	3100
Al	896	233	2702

بررسی صحت نتایج. طبق بررسی نویسنده، تاکنون تحلیل ورق نازک مدرج تابعی برای تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی نقطه مورد بررسی قرار نگرفته است؛ لذا به‌علت نبود کارهای انجام‌شده در این زمینه، برای اثبات صحت نتایج روش حل مستقیم می‌توان در یک حالت خاص با اعمال منبع حرارتی سطحی، نتایج را با مرجع [30] مقایسه نمود؛ لذا ابتدا به مقایسهٔ نتایج به‌دست‌آمده از حل عددی و نتایج ارائه‌شده توسط ردی [30] می‌پردازیم.

شرایط مرزی و اولیهٔ ورق در این مرجع، به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{on} \quad x = 0 \qquad \text{(۳۳- الف)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \qquad \text{(۳٤- ب)}$$

$$T = 0 \quad \text{on} \quad x = L\,,\quad z = H \qquad \text{(۳۵- ج)}$$

$$T(x,z,0) = 0 \qquad \text{(۳٦- د)}$$

از مقادیر بدون بعد زیر در مرجع [30] استفاده گردیده است.

$$H = 1\,,\quad k = 1 \qquad G(t) = 1\,,\quad L = 1 \qquad (۳۷)$$

هم‌گرایی سریع روش و هم‌خوانی بسیار نزدیک آن با جواب‌های مرجع [30] قابل‌مشاهده است. همچنین می‌توان دید که ابعاد شبکهٔ ۱۰×۱۰ برای به‌دست‌آوردن جواب‌های همگراشدهٔ قابل‌قبول کافی است.

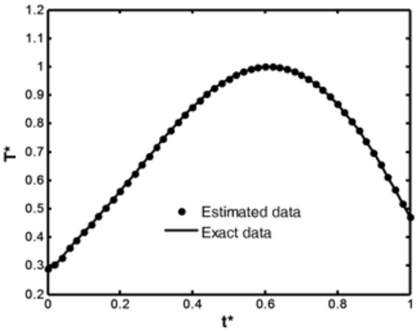
به‌منظور نمایش صحت حل مستقیم، نمونه‌ای از کانتورهای توزیع دما در شکل (۲) مربوط به مثال (۲) نمایش داده می‌شود.

نتایج تخمین منبع حرارتی نقطه‌ای. در این بخش در قسمت اول فرض بر این است که مکان منبع حرارتی در مسئلهٔ ما معلوم است اما شدت منبع مجهول می‌باشد؛ لذا به ارائهٔ نتایج براساس این شرایط می‌پردازیم. در قسمت دوم فرض بر این است که علاوه‌بر شدت منبع حرارتی، مکان منبع نیز مجهول می‌باشد؛ لذا به تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای می‌پردازیم.

برای ارزیابی توانایی الگوریتم ارائه در تخمین شدت منبع حرارتی، توابع مختلفی را انتخاب می‌کنیم.

در مثال اول تابع دقیق منبع حرارتی را به‌صورت رابطهٔ زیر درنظر می‌گیریم.

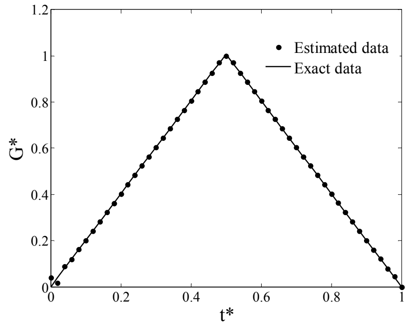
$$G(t) = \begin{cases} 2G_0\left(\frac{t}{t_f}\right)\,, & 0 \le \frac{t}{t_f} \le 0.5 \\ 2G_0\left(1-\frac{t}{t_f}\right)\,, & 0.5 \le \frac{t}{t_f} \le 1 \end{cases} \qquad (۳۸)$$



شکل ۲ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی دما در مثال ۲ ($\sigma = 0$)

جدول ۲ مقایسهٔ نتایج توزیع دما با مرجع [30]

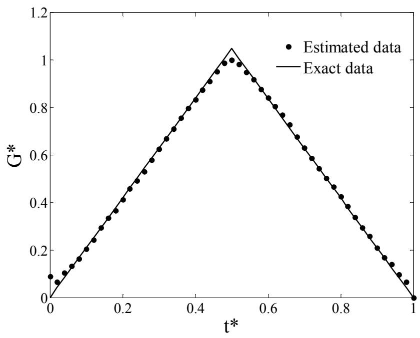
		T^*	
ابعاد شبکه	$T(0,0)$	$T(\frac{L}{2},0)$	$T(\frac{L}{2},\frac{H}{2})$
2×2	0.3107	0.2410	0.1927
4×4	0.2984	0.2322	0.1838
8×8	0.2956	0.2300	0.1818
10×10	o.2953	0.2298	0.1816
12×12	0.2953	0.2298	0.1816
[29]	0.2947	0.2293	0.1811



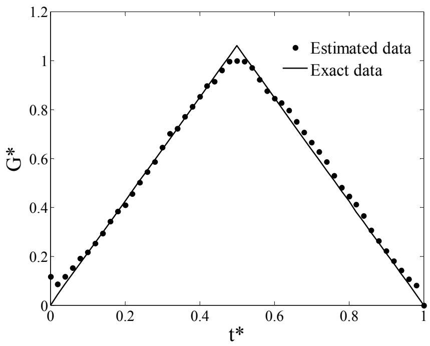
شکل ۳ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۱ $(\sigma = 0)$

در جدول (۳) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه‌شده براساس رابطهٔ زیر برای انحراف معیارهای مختلف مثال اول آورده شده است.

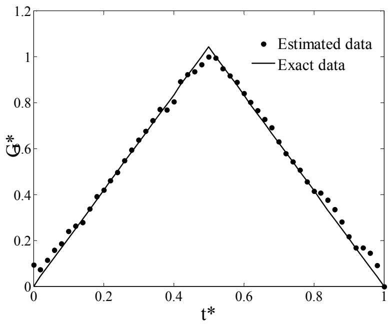
$$\text{Error} = \left[\sum_{i=1}^{N_t}\left|\frac{G(i) - G_{exact}(i)}{G_{exact}(i)}\right| \div N_t\right] \times 100 \quad (۳۹)$$



شکل ٤ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۱ $(\sigma = 0.1)$



شکل ۵ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۱ $(\sigma = 0.2)$



شکل ٦ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۱ $(\sigma = 0.3)$

جدول ۳ نتایج تخمین شدت منبع حرارتی برای انحراف معیارهای مختلف (مثال ۱)

σ	دفعات تکرار	زمان محاسبات (ثانیه)	درصد خطا
0	18	4.23	0.89
0.1	4	3.94	1.1
0.2	3	3.94	6.83
0.3	2	3.93	7.45

در مثال دوم تابع دقیق منبع حرارتی را به‌صورت رابطهٔ زیر درنظر می‌گیریم.

$$G(t) = G_0(t)\sin(\frac{\pi t}{t_f}) \quad (٤٠)$$

مختصات مکان منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطهٔ زیر است.

$$x_0(\text{exact})=0.25 \qquad z_0(\text{exact})=0.25 \quad (٤١)$$

حدس اولیه برای تخمین مکان منبع حرارتی به‌صورت زیر درنظر گرفته شده است.

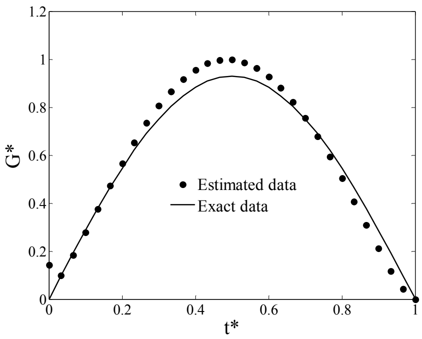
$$x_0(\text{exact})=0.2 \quad z_0(\text{exact})=0.2 \qquad (٤٢)$$

در شکل (۷) شدت منبع حرارتی نقطه‌ای تخمین زده‌شدهٔ مثال دوم با مقدار دقیق آن برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ مقایسه شده است.

مختصات به‌دست‌آمده برای مکان منبع حرارتی بعد از ۵ مرحله تکرار به‌صورت زیر می‌باشد.

$$x_0(\text{exact})=0.2402 \quad z_0(\text{exact})=0.2402 \qquad (٤٣)$$

در جدول (٤) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه‌شده برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ برای شدت و مکان مثال دوم آورده شده است.



شکل ۷ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۲ $(\sigma = 0)$

جدول ٤ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای (مثال ۲)

$\sigma = 0$	دفعات تکرار	زمان محاسبات (ثانیه)	درصد خطا
G(t)	5	92.89	2.51
x	5	92.89	3.94
z	5	92.89	3.94

در مثال سوم تابع دقیق منبع حرارتی نقطه‌ای را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$G(t) = \begin{cases} 3G_0\left(\frac{t}{t_f}\right) & 0 \le \frac{t}{t_f} \le \frac{1}{3} \\ G_0 & \frac{1}{3} \le \frac{t}{t_f} \le \frac{2}{3} \\ 3G_0\left(1-\frac{t}{t_f}\right) & \frac{2}{3} \le \frac{t}{t_f} \le 1 \end{cases} \qquad (٤٤)$$

مختصات مکان منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطهٔ زیر است.

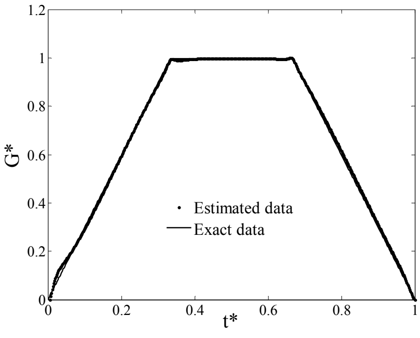
$$x_0(\text{exact})=0.25 \quad z_0(\text{exact})=0.25 \qquad (٤٥)$$

در شکل (۸) شدت منبع حرارتی نقطه‌ای تخمین زده‌شدهٔ مثال سوم با مقدار دقیق آن برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ نشان داده شده است.

مختصات به‌دست‌آمده برای مکان منبع حرارتی بعد از ۲٦ مرحله تکرار به‌صورت زیر می‌باشد.

$$x_0(\text{exact})=0.2498 \quad z_0(\text{exact})=0.2498 \qquad (٤٦)$$

در جدول (۵) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه‌شده برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ برای شدت و مکان مثال سوم آورده شده است.



شکل ۸ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۳ $(\sigma = 0)$

جدول ۵ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای (مثال ۳)

درصد خطا	زمان محاسبات(ثانیه)	دفعات تکرار	$\sigma = 0$
0.44	84.47	26	G(t)
0.09	84.47	26	x
0.09	84.47	26	z

نتایج تخمین منبع حرارتی گسترده. در این بخش فرض بر این است که علاوه‌بر شدت منبع حرارتی گسترده، پارامترهایی از مکان منبع نیز مجهول می‌باشد، لذا به تخمین هم‌زمان این پارامترهای مکانی و شدت منبع حرارتی گسترده می‌پردازیم.

عبارت منبع حرارتی در معادلهٔ حاکم (۱) برای منبع حرارتی گسترده به‌صورت رابطهٔ زیر است:

$$G(x,z,t) = G^*(t)F(x,z;x_0,z_0) \tag{۴۷- الف}$$

$$F(x,z;\ x_0,z_0) = (x+x_0)^2 + (z+z_0)^2 \tag{۴۷- ب}$$

در رابطهٔ (۴۷)، x_0 و z_0 معرف پارامترهای مکانی مجهول منبع حرارتی گسترده می‌باشند. در این بخش هدف تخمین G^*، x_0 و z_0 به‌صورت هم‌زمان می‌باشد. در مثال چهارم تابع دقیق منبع حرارتی گسترده را به‌صورت رابطهٔ زیر درنظر می‌گیریم.

$$G^*(t) = \begin{cases} 3G_0\left(\frac{t}{t_f}\right) & 0 \le \frac{t}{t_f} \le \frac{1}{3} \\ G_0 & \frac{1}{3} \le \frac{t}{t_f} \le \frac{2}{3} \\ 3G_0\left(1-\frac{t}{t_f}\right) & \frac{2}{3} \le \frac{t}{t_f} \le 1 \end{cases} \tag{۴۸}$$

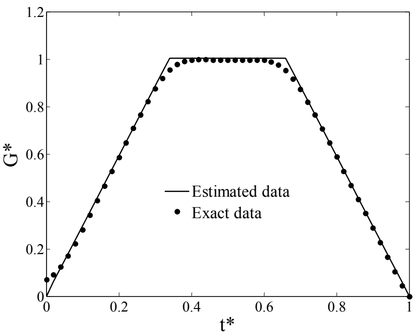
پارامترهای مجهول مکانی منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطهٔ زیر است.

$$x_0(\text{exact})=0.5 \qquad z_0(\text{exact})=0.5 \tag{۴۹}$$

حدس اولیه برای تخمین این پارامترها را نیز به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$x_0(\text{exact})=0.7 \qquad z_0(\text{exact})=0.7 \tag{۵۰}$$

در شکل (۹) شدت منبع حرارتی گستردهٔ تخمین زده‌شدهٔ مثال چهارم با مقدار دقیق آن برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ رسم گردیده است.



شکل ۹ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی گستردهٔ مثال ٤ برای $(\sigma = 0)$

مختصات به‌دست‌آمده برای پارامترهای مکانی منبع حرارتی بعد از ۲۹۱۵ مرحله تکرار به‌صورت زیر می‌باشد.

$$x_0(\text{exact})=0.4865 \qquad z_0(\text{exact})=0.5242 \tag{۵۱}$$

در جدول (٦) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه‌شده برای انحراف معیار $(\sigma = 0)$ برای شدت و مکان مثال چهارم آورده شده است.

جدول ٦ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی مثال ٤

درصد خطا	زمان محاسبات(ثانیه)	دفعات تکرار	$\sigma = 0$
1.17	84.67	2915	G(t)
2.76	84.67	2915	x
4.61	84.67	2915	z

در مثال پنجم تابع دقیق منبع حرارتی گسترده را به‌صورت رابطهٔ زیر درنظر می‌گیریم.

$$G(t)=\begin{cases}2G_0\left(\frac{t}{t_f}\right), & 0\le\frac{t}{t_f}\le 0.5\\ 2G_0\left(1-\frac{t}{t_f}\right), & 0.5\le\frac{t}{t_f}\le 1\end{cases} \tag{۵۲}$$

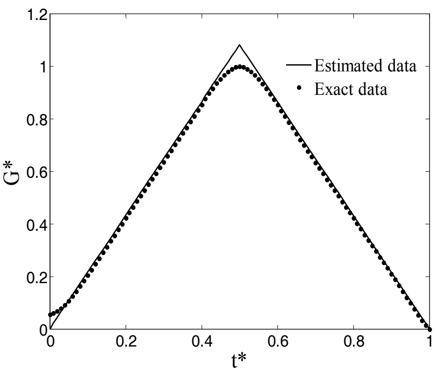
پارامترهای مکانی مجهول منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطهٔ زیر است.

$$x_0(exact)=0.5$$
$$z_0(exact)=0.5 \tag{۵۳}$$

حدس اولیه برای تخمین پارامترهای مکانی مجهول منبع حرارتی نیز به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$x_0(exact)=0.7$$
$$z_0(exact)=0.7 \tag{۵٤}$$

در شکل (۱۰) شدت منبع حرارتی گستردهٔ تخمین زده‌شدهٔ مثال پنجم با مقدار دقیق آن برای انحراف معیار $(\sigma=0)$ رسم گردیده است.



شکل ۱۰ مقایسهٔ مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی گستردهٔ مثال ۵ برای $(\sigma=0)$

مختصات به‌دست‌آمده برای پارامترهای مکانی منبع حرارتی بعد از ۱۹۹۵ مرحله تکرار به‌صورت زیر می‌باشد.

$$x_0(exact)=0.4911$$
$$z_0(exact)=0.5288 \tag{۵۵}$$

در جدول (۷) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه‌شده برای انحراف معیار $(\sigma=0)$ برای شدت و مکان مثال (۵) آورده شده است.

جدول ۷ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی مثال ۵

$\sigma=0$	دفعات تکرار	زمان محاسبات(ثانیه)	درصد خطا
G(t)	1995	98.11	1.62
x	1995	98.11	1.82
z	1995	98.11	5.45

محاسبهٔ خطای RMSE برای پارامترهای مکانی. در جداول قبل با فرض معلوم بودن انحراف معیار، خطا را از رابطهٔ (۳۹) به‌دست آوردیم. حال بااستفاده از مقادیر تخمینی به‌دست‌آمده برای پارامترهای مکانی مثال‌های ۲ تا ۵ مقدار RMS را به‌دست می‌آوریم.

$$RMSE=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\hat{x}_i)^2} \tag{۵٦}$$

	مثال ۲	مثال ۳	مثال ٤	مثال ۵
	RMSE			
x_0	0.01	0.014	2×10^{-4}	8×10^{-6}
z_0	0.01	0.014	10^{-4}	9×10^{-4}

نتیجه‌گیری

در این مقاله برای تخمین مکان و شدت منبع حرارتی از الگوریتم گرادیان مزدوج استفاده شده است. همان‌طور که از نتایج مشخص گردید سرعت و دقت تخمین برای این مسئله بسیار خوب است و جزء

روش‌های پایدار می‌باشد که درصورت حل درست معادلات مستقیم و الحاقی، حتماً به جواب می‌رسد و همگرایی روش در مراجع مختلف تضمین گردیده است.

توابع مختلفی برای تخمین منبع حرارتی مورد بررسی قرار گرفت که مشاهده گردید الگوریتم محاسباتی توانایی تخمین هر تابعی را به‌عنوان منبع حرارتی دارد.

از آنجا که اندازه‌گیری‌ها همیشه دقیق نبوده است و همواره مقداری خطا در اندازه‌گیری پارامترها وجود دارد، در این مقاله خطاهای اندازه‌گیری نیز درنظر گرفته شد که نتایج نشان‌دهندهٔ این است که وجود خطا تأثیر چندانی در نتایج تخمینی برای حالت‌های مختلف ندارد.

فهرست علائم

- c ظرفیت گرمایی ویژه (J/kg°C)
- d جهت جستجو
- G شدت منبع حرارتی
- H ضخامت ورق (m)
- J تابع هدف
- $\hat{J}$ تابع هدف اصلاح‌شده
- k ضریب هدایت گرمایی (W/m°K)
- L طول ورق (m)
- M تعداد سنسورها
- N تعداد تقسیمات
- p شاخص تابع توزیع
- T دما (K)
- t زمان (s)
- V تابع توزیع ماده
- x_0 مختصات مکانی منبع حرارتی در راستای محور x
- Y دمای اندازه‌گیری‌شده به‌وسیلهٔ سنسور (K)
- z_0 مختصات مکانی منبع حرارتی در راستای محور z

علائم یونانی

- β اندازهٔ گام جستجو
- γ ضریب گرادیانی
- δ تابع دلتای دیراک
- Δt گام زمانی
- ε معیار هم‌گرایی
- λ ضریب لاگرانژ
- ρ چگالی (kgm^{-3})
- σ انحراف معیار استاندارد

بالانویس

- k مرحله تکرار

زیرنویس‌ها

- Ave مقدار متوسط
- f نهایی
- m شمارهٔ سنسور
- max مقدار بیشینه

مراجع

1. Silva Neto, A.J. and Ozisik, M.N., "The estimation of space and time dependent sterength of a volumetric heat source in a one-dimentional plate", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, No. 6, pp. 909-915, (1994).
2. Pasquetti, R. and Petit, D., "Inverse-heat-conduction problems with boundary element: analysis of a corner effect", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 13, No. 4, pp. 321–331, (1994).
3. Yang, C.Y., "Solving the two-dimensional inverse heat source problem through the linear least squares error method", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, No. 2, pp. 393–398, (1998).
4. Karami, G. and Hematiyan, M.R., "A boundary element method of inverse non-linear heat conduction analysis with point and line heat sources", *Communication in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp.191–203, (2000).
5. Su, J. and Silva Neto, A.J., "Two-dimensional inverse heat conduction problem of source strength estimation in cylindrical rods", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 25, No. 10, pp. 861-782, (2001).
6. Nortershauser, D. and Millan, P., "Estimation of moving heat sources with a three dimensional unsteady inverse method", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 5, No. 8, pp. 529-540, (2001).
7. Niliot, C.L. and Lefever, F., "A method for multiple steady line heat sources identification on a diffusive system: application to an experimental 2D problem", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, No. 7, pp. 1425-1438, (2001).
8. Lefever, F. and Niliot, C.L., "The BEM for point heat source estimation: application to multiple static sources and moving sources", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 41, No. 6, pp. 536-545, (2002).
9. Lefever, F. and Niliot, C.L., "Multiple transient point heat sources identification in heat diffusion: Application to experimental 2D problems", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, No. 9, pp. 1951-1964, (2002).
10. Niliot, C.L. and Lefever, F., "A parameter estimation approach to solve the inverse problem of point heat sources identifications", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, No. 4, pp. 827-841, (2004).
11. Zueco, J., Alhama, F. and C. Gonza'lez Ferna'ndez, F., "Inverse determination of heat generation sources in two-dimensional homogeneous solids: Application to orthotropic medium", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, No. 1, pp. 40-55, (2006).
12. Liu, C.S., "A two-stage LGSM to identify time-dependent heat source through an internal measurement of temperature", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, No. 7-8, pp. 1635-1642, (2009).
13. Liu, F.B., "A modified genetic algorithm for solving the inverse heat transfer problem of estimating plane heat source", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, No. 15-16, pp. 3745-3752, (2008).

14. Yan, L., Fu, C.L. and Yang, F.L., "The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 32, No. 3, pp. 216-222, (2008).
15. Nili Ahmadabadi, M., Arab, M. and Maalek Ghaini, F.M., "The method of fundamental solutions for the inverse space-dependent heat source problem", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, No. 10, pp. 1231-1235, (2009).
16. Mierzwiczak, M. and Kolodziej, J.A., "Application of the method of fundamental solutions and radial basis functions for inverse transient heat source problem", *Computer Physics Communications*, Vol. 181, No. 12, pp. 2035-2043, (2010).
17. Geng, F. and Lin, Y., "Aplication of the variational iteration method to inverse heat source problems", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, No. 11-12, pp. 2098-2102, (2009).
18. Golbahar Haghighi , M.R., Eghtesad, M., Malekzadeh, P. and Necsulescu, D.S., "Three-dimensional inverse transient heat transfer analysis of thick functionally graded plates", *Energy Conversion and Management*, Vol. 50, No. 3, pp. 450-457, (2009).
19. Mohammadiun, M. and Rahimi, A.B., "Estimation of time-dependent heat flux using temperature distribution at a point in a two layer system", *Scientia Iranica*, Vol. 18, No. 4, pp. 966-973, (2011).
20. Lee, H.L., J. Chang, W., Chen, W.L. and Yang, Y.C., "Inverse heat transfer analysis of a functionally graded fin to estimate time-dependent base heat flux and temperature distributions", *Energy Conversion and Management*, Vol. 57, pp. 1-7, (2012).
21. Lee, H.L., Chang, W.J., Sun, S.H. and Yang, Y.C., "Estimation of temperature distributions and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder simultaneously subjected to inner-and-outer boundary heat fluxes", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 2, pp. 786-792, (2012).
22. Abou Khachfe, R. and Jarny, Y., "Estimation of heat sources within two dimensional shaped bodies", *3rd Int. Conference on Inverse Problems in Engineering*, June 13-18, Port Ludlow, Washington, USA, (1999).
23. Alifanov, O.M., "*Inverse heat transfer problems*", Springer-Velag, New York, (2000).
24. Daniel, J.W., "*The approximate minimization of functional*", Pretice-Hall Inc., Englewood Cliffs, (1971).
25. Fletcher, R. and Reeves, C.M., "Function minimization by conjugate gradients", *Computer Journal*, Vol. 7, No. 2, pp. 149-154, (1964).
26. Golbahar Haghighi, M.R., Eghtesad, M., Necsulescu, D.S. and Malekzadeh, P., "Temperature control of functionally graded plates using a feedforward–feedback controller based on the inverse solution and proportional-derivative controller", *Energy Conversion and Management*, Vol. 51, No. 1, pp. 140-146,(2010)
27. Daniel, J.W., "*The approximate Minimization of Functional*", Pretice-Hall Inc., Englewood Cliffs, (1971).
28. Fletcher, R. and Reeves C.M., "Function Minimization by Conjugate Gradient", *Computer J.*, 7, pp. 149-154, (1964).
29. Ozisik, M.N., "*Inverse heat transfer: fundamental and applications*", CRC Press, New York, (2000).

30. Reddy, J.N., "*An introduction to the finite element method*", Third Edition, McGraw Hill, (2006).